Методика изучения теоремы

Теорема «В любой треугольник можно вписать окружность».

«Около лебого треугольника можно описать окружность».

**1. Подготовительный этап**

* 1. *Мотивация изучения теоремы*

Для того чтобы начать изучать нашу тему давайте подумаем, сможем ли мы решить нашу задачу, основываясь только на изученный материал? Нет, как вы можете видеть из условия задачи №1 старых знаний о касательной и секущей к окружности нам не достаточно, для этого мы с вами сегодня познакомимся с понятиям описанной окружности.

**Задача 1**

Жильцы трех домов решили совместными усилиями построить колодец. Какое место для колодца следует выбрать, чтобы все три расстояния от него до домов были одинаковыми?[5].

**Ответ:** Пусть *А, В* и *С* — точки расположения трех данных домов. Проведем серединные перпендикуляры к отрезкам *АВ* и ВС. Тогда точка *О* их пересечения будет единственной точкой, равноудаленной от точек *А, В* и *С,* поскольку для этой точки выполнены равенства *АО=ОВ* и *ВО=ОС,* а если точку *О* выбрать иначе, то для нее хотя бы одно из указанных равенств будет несправедливо. Заметим, что проведенные перпендикуляры могут и не пересечься, но только в случае, когда точки *А, В* и *С* лежат на одной прямой. Таким образом, искомое место для колодца — точку *О* — можно найти приведенным способом, но лишь при условии, что дома расположены не на одной прямой.

*1.2. Актуализация знаний и умений учащихся, необходимых для сознательного усвоения теоремы*

Для того чтобы ученик полностью освоил тему и владел определениями и понятиями необходимо повторить ряд определений представленных в Табл. 1.

*Таблица 1*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| № | То, что необходимо повторить | Задания для повторения |
| 11 | Окружность   | cirkulis.jpgНачертите окружность с радиусом 2 см ( рис. 1)Рис. 1 |
| 2 | Диаметр | Определить на рис. 2 диаметр окружности, если известно, что радиус - 2 см. Рис. 2 |
|  | Радиус  | Определите из рис. 3 радиус окружности, если известно, что диаметр 16 см. Рис. 3 |
|  | Сфера  | Из рис. 4 сформулировать понятия сферы. Похожее изображениеРис. 4 |

*1.3. Подведение учащихся к формулировке теоремы*

**Задача 2**

Как далеко видно с воздушного шара, поднявшегося на высоту км над Землей (радиус Земли примерно равен  км)? (рис. 5).

Решение: По теореме о касательной к окружности, касательная перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания, то есть 
.
Тогда по теореме Пифагора: , 



Рис.5

 (км.)

Ответ: км.

Сделать вывод.

В любой треугольник можно вписать окружность, центр вписанной окружности – точка пересечения биссектрис.

Около любого треугольника можно описать окружность, центр описанной окружности – точка пересечения серединных перпендикуляров.

**2. Основной этап**

**2.1. Формулировка теоремы, овладение ее содержанием, структурой, назначением**

**Вписанная окружность**

**Определение:** если все стороны многоугольника касаются окружности, то окружность называется вписанной в многоугольник, а многоугольник – описанным около этой окружности. Рис. 6

**Теорема:** в любой треугольник можно вписать окружность, и притом только одну.

Центр окружности, вписанной в треугольник, находится на пересечении биссектрис треугольника.

**Свойство:** в любом описанном четырехугольнике суммы противоположных сторон равны.

**Признак:** если суммы противоположных сторон выпуклого четырехугольника равны, то в него можно вписать окружность.

**Описанная окружность**

**Определение:** если все вершины многоугольника лежат на окружности, то окружность называется описанной около многоугольника, а многоугольник – вписанным в эту окружность.

 Рис. 7

**Теорема:** около любого треугольника можно описать окружность, и притом только одну.

Центр окружности, описанной около треугольника, находится на пересечении серединных перпендикуляров.

**Свойство:** в любом вписанном четырехугольнике сумма противоположных углов равна 180˚.

**Признак:** если сумма противоположных углов четырехугольника равна 180˚, то около него можно описать окружность

**2.2. Формирование ориентировочной схемы доказательства. Проведение доказательства**

**Вписанная окружность**

|  |  |
| --- | --- |
| Окружность вписана в многоугольник, если она касается всех его сторон (рис 8.).В любой треугольник можно вписать окружность. Центр вписанной в треугольник окружности лежит в точке пересечения биссектрис треугольника. | Рис. 8 |
| Если окружность вписана в четырёхугольник, то суммы противоположных сторон этого четырёхугольника равны:AB + CD = BC + AD (рис.9) | Рис. 9 |
| **Пример 1.**По данным рисунка найдите радиус вписанной в равнобедренный треугольник окружности. |
| Дано: ΔАВС – р/б;АС – основ-е;ВН – высота;Окр. (О; r) – впис.;АВ = 13 см;АС = 10 см. (рис. 10) | Рис. 10 |
| Найти: r - ? |
| **Решение:**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *№ п/п* | *План доказательства теоремы* | *Проведение доказательства* |
| 1. | В первом действии объясним, что т. О - центр вписанной окружности принадлежит высоте ВН, проведённой к основанию равнобедренного треугольника АВС: | 1) ΔАВС – р/б, АС – основание, ВН – высота ⇒ ВН – биссектриса (по свойству высоты р/б треугольника, проведённой к основанию) ⇒ О ∈ ВН (центр вписанной в треугольник окружности); |
| 2. | Во втором действии поясним, почему отрезки OH, OK, ON - радиусы вписанной окружности и сделаем вывод, что они равны: | 2) Пусть ОН ⊥ АС, ОК, ON – радиусы вписанной окружности ⇒ ON ⊥ ВС, OK ⊥ АВ (радиусы, проведённые в точку касания, по свойству касательной), ОН = ON = OK; |
| 3 | В третьем действии найдём отрезки АН = НС (по свойству равнобедренного треугольника ВН высота, проведённая к основанию равнобедренного треугольника, является одновременно медианой: | 3) ΔАВС – р/б, АС – основание, ВН – высота ⇒ ВН – медиана (по свойству высоты р/б треугольника, проведённой к основанию) ⇒ АН = НС = 5 см; |
| 4 | В четвёртом действии из прямоугольного треугольника АВН по теореме Пифагора найдём высоту ВН: | 4) ΔАВН – прямоугольный, по теореме Пифагора: АВ2 = ВН2 + АН2;169 = ВН2 + 25;ВН = 12 (см).  |
| 5 | В пятом действии используя свойство отрезков касательных (АК = АН), найдём отрезок ВК: | 5) AK = AH = 5 см (свойство отрезков касательных) ⇒ ВК = 13 – 5 = 8 (см); |
| 6 | В шестом действии в прямоугольном ОВК используя равенство отрезков ОН и ОК, выразим ВО через ОК:после чего по теореме Пифагора найдем ОК (радиус вписанной окружности): | 6) ΔОВК – прямоугольный (OK ⊥ АВ), ОК = OH ⇒ BO = BH – OH = 12–ОК;По теореме Пифагора:ВО2 = ОК2 + ВК2; (12 – ОК)2 = ОК2 + 64; 144 – 24ОК + ОК2 = ОК2 + 64; 80 = 24ОКОК = $3\frac{1}{3}$ (см). |
| 7 | Теперь напишем ответ к задаче:  | радиус вписанной окружности - $3\frac{1}{3}$ см. |

 |
| **Пример 2.** Найдите радиус окружности, вписанной в равнобедренную трапецию, если боковая сторона трапеции 10 см, меньшее основание равно 4 см. |
| Дано: ABCD – р/б трап.;BC, AD – основания;Окр. (О; r) – впис.;ВС = 4 см;АВ = 10 см. (рис. 11.12) |  Рис. 11 Рис. 12 |
| Найти: r - ? |
| **Решение:**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| № п/п | План доказательства теоремы | Проведение доказательства |
| 1. | В первом действии используя условие, что ABCD - равнобедренная, окружность вписанная, поясним, что центра вписанной окружности принадлежит высоте, соединяющей середины оснований трапеции: | 1) ABCD – р/б трап-я, ВС, AD – основания; Окр.(О; r) – впис-я ⇒ ОР = ОН = ОМ = ON = r, ОР ⊥ ВС, ОН ⊥ АD, ON⊥AB, OM⊥CD (по свойству касательной), РН – высота трапеции; |
| 2. | Во втором действии используем свойство четырёхугольника, в который вписана окружность (сумма противоположных сторон равны), найдём основание AD: | 2) Окр.(О, r) – вписанная ⇒ АВ + СD = BC + AD (свойство четырёхугольника, в который вписана окружность); 20 = 4 + AD; AD = 16. |
| 3 | В третьем действии проведём высоты трапеции ВК и СЕ, докажем равенство прямоугольных треугольников АВК и CDE, откуда сделаем вывод, что АК = ED:После этого рассмотрим прямоугольник ВСЕК и найдём отрезок ЕК, после чего вычислим отрезок АК = ED:Далее из прямоугольного треугольника АВК по теореме Пифагора вычислим высоту ВК: | 3) Проведем ВК, СЕ – высоты трапеции. ΔАВК = ΔCDE (прямоугольные, по гипотенузе (АВ = CD) и острому углу (∠А = ∠D)) ⇒ AK = ED.ВСЕК – прямоугольник ⇒ ВС = ЕК = 4 (см);АК = ED = (AD – EK) : 2 = (16 – 4) : 2 = 6 (см).По теореме Пифагора (ΔАВК):АВ2 = АК2 + ВК2;100 = 36 + ВК2;ВК2 = 64;ВК = 8 (см). |
| 4 | В четвёртом действии вычислим радиус вписанной окружности (т.к. он равен половине РН, а РН = ВК): | 4) ВК = РН = 8 см, ОР = ОН = 4 см. |
| 5 | Теперь напишем ответ к задаче:  | радиус вписанной окружности – 4 см. |

 |

**Описанная окружность**

|  |  |
| --- | --- |
| Окружность описана около многоугольника, если все вершины многоугольника лежат на окружности (рис. 13).Около любого треугольника можно описать окружность.Центр описанной около треугольника лежит в точке пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника. | Рис. 13 |
| Если окружность описана около четырёхугольника, то суммы его противоположных углов равны:∠A + ∠C = ∠B + ∠D. (рис. 14) | Рис. 14 |
|

|  |
| --- |
| **Пример 3.**Найдите радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника АВС, если его катеты равны 24 и 10 см. |
| Дано: ΔАВС – п/уг.;АВ – гипотенуза;АС = 24 см;ВС = 10 см;Окр. (О; r) – опис-я. (рис. 15) | Рис. 15 |
| Найти: r - ? |
| **Решение:**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| № п/п | План доказательства теоремы | Проведение доказательства |
| 1. | В первом действии определим, что в прямоугольном треугольнике АВС радиус описанной окружности равен половине гипотенузы (используя следствие из теоремы о вписанной окружности):: | 1) Если ∠С – прямой, т. С лежит на окружности (треугольник вписанный) ⇒ ∠АСВ – вписанный, опирается на полуокружность АВ (Следствие 2 из теоремы о вписанном угле) ⇒ АВ (гипотенуза) – диаметр описанной окружности ⇒ О ∈ АВ, радиус описанной около прямоугольного треугольника окружности равен половине гипотенузы; |
| 2. | Во втором действии в прямоугольном треугольнике АВС с прямым углом С по теореме Пифагора найдём гипотенузу АВ: | 2) ΔАВС – прямоугольный, ∠С – прямой, по теореме Пифагора:АВ2 = АС2 + ВС2 = 576 + 100 = 676;АВ = 26 (см); |
| 3 | В третьем действии вычислим радиус описанной окружности: | 3) r = $\frac{1}{2}$AB = 13 (см). |
| 4 |  Теперь напишем ответ к задаче | r = 13 см. |

 |

 |
| **Пример 3.**Найдите площадь равнобедренного треугольника с основанием АВ = 6, если расстояние от центра описанной окружности до АВ равно 4. |
| Дано: ΔАВС – р/б;АВ – основ-е;CD – высота;Окр. (О; r) – опис-я.;АВ = 6;OD = 4. (рис. 16. 17) |  Рис. 16 Рис. 17 |
| Найти: SABC - ? |
| **Решение:**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| № п/п | План доказательства теоремы | Проведение доказательства |
| 1. | В первом действии покажем, что О - центр описанной окружности, принадлежит СD - высоте равнобедренного треугольника, проведённой к его основанию: | 1) СD – высота, проведённая к основанию равнобедренного ΔАВС ⇒ СD – серединный перпендикуляр к АВ ⇒ О ∈ CD; |
| 2. | Во втором действии сделаем вывод, что АО = СО = ВО как радиусы описанной окружности: | 2) О – центр описанной около равнобедренного ΔАВС окружности ⇒ АО = СО = ВО – радиусы описанной окружности; |
| 3 | В третьем действии в прямоугольном треугольнике АОD с высотой CD, которая является одновременно медианой (по свойству высоты, проведённой к основанию равнобедренного треугольника) сначала найдём АD, а потом по теореме Пифагора найдём радиус АО: | 3) ΔAOD – прямоугольный (CD – высота), AD = $\frac{1}{2}AB=3$. По теореме Пифагора:АО2 = AD2 + DO2 = 9 + 16 = 25;AO = 5; |
| 4 | В четвёртом действии вычислим высоту CD | 4) СD = OD + CO = 4 + 5 = 9; |
| 5 | В пятом действии найдём площадь треугольника АВС по формуле площади треугольника: | 5) $S\_{ABC}=\frac{1}{2}AB∙CD= \frac{1}{2}∙6∙9=27$. |
| 6 | Теперь напишем ответ к задаче:  | Ответ: $S\_{ABC}=27$. |

 |

3. Заключительный этап

**Вопросы для закрепления теоремы.**

1. Можно ли в параллелограмм вписать окружность? ( Не всегда, надо чтобы суммы противоположных сторон были равны)
2. А описать около него окружность? ( Нет, не всегда, сумма противоположных углов должна быть 180)

Закончите предложение:

1. Центр вписанной в треугольник окружности –точка пересечения его ...(биссектрис)
2. Центр вписанной в треугольник окружности равноудален от его...(сторон)
3. Многоугольник называется вписанным в окружность, если все его ...(вершины лежат на окружности)
4. Окружность вписана в многоугольник, если ...(все его стороны касаются окружности)
5. Вписанные углы равны, если они...(опираются на одну дугу)
6. Центр описанной около треугольника окружности равноудален от его ...(вершина)

Рассмотрение обратных, противоположных утверждений, связанных с теоремой.

В любой треугольник можно вписать окружность и притом только одну.

Если все стороны многоугольника являются касательными одной окружности, то такая окружность называется вписанной в многоугольник.

Около любого треугольника можно описать окружность и притом только одну.

Если на окружности лежат все вершины многоугольника, то окружность называется описанной около многоугольника.

 Задачи базового, основного и продвинутого уровня сложности (по 2 задачи каждого уровня).

В окружающем нас мире существует множества предметов которые имеют форму окружности или ее элементы и в связи с этим мы можем решить ряд практических задач.

Приведем примеры в табл. 2.

*Таблица 2*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Базовый уровень(2-3 балла) | Основной уровень(4 балла) | Уровень повышенной сложности(5 баллов) |
| **Задача 1.1** Из 50 звеньев, одно из которых изображено на рис. 18, составлена цепь. Какова длина цепи?**Ответ:** 12х50 + 3х2 = 606 ммРис. 18**Задача 1.2** Поезд едет со скоростью км/ч. Диаметр его колеса равен  см. Сколько оборотов в минуту делает колесо поезда? ( Примите ) (Рис. 21).81 км/ч120 смРис. 21*Решение:* Длина окружности колеса, если принять , примерно равна  см. За одну минуту поезд проходит  метров. Следовательно, за одну минуту колесо делает  (оборотов).Ответ:  оборотов. | **Задача 2** Высевающий аппарат большинства сеялок представляет собой цилиндрическую катушку с желобками (см. рис. 19), которые при вращении катушки захватывают зерна и высыпают из сеялки.  Рис. 19При проектировании катушки вначале определяют число желобков *п* и ширину желобка *t,* исходя из размеров и механических свойств зерен, для которых предназначена сеялка. Эти данные позволяют найти диаметр катушки.Каким должен быть диаметр катушки высевающего аппарата зерновой сеялки у которой *t=13,6* мм (с учетом ширины ребра между смежными желобками), *п=12*?**Ответ:**Требуется найти диаметр окружности, описанной около правильного n-угольника со стороной *ап* — *t.* По известной формуле получаем: | **Задача 3** Чугунная труба имеет длину м и внешний диаметр  см. Толщина стенок трубы равна  см. Найдите вес трубы, если удельный вес чугуна примерно равен г/см3. Ответ дайте в килограммах. (Примите ) (Рис. 20).2 см20 см Рис. 20*Решение:* Площадь поперечного сечения стенок трубы равна  (см2). Объем трубы равен (см3). Вес трубы равен (г) .Ответ: . |

**Прикладные задачи с решениями.**

Для закрепления теоретического материала необходимо решить ряд прикладных задач. Задачи такого типа, разбитые на уровни представлены в табл. 3.

*Таблица 3*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Базовый уровень(2-3 балла) | Основной уровень(4 балла) | Уровень повышенной сложности(5 баллов) |
| **Задача 1** Поле стадиона имеет форму прямоугольника с примыкающими к нему с двух сторон полукругами. Длина беговой дорожки вокруг поля равна  метров. Длина каждого из двух прямолинейных участков дорожки равна  метров. Найдите ширину  поля стадиона. В ответе укажите  (Рис. 21). Рис. 21*Решение:* Суммарная длина двух криволинейных участков беговой дорожки равна длине окружности и равна  метров. Диаметр этой окружности равен ширине  поля стадиона и равен . Следовательно, .Ответ: метров. | **Задача 2.1[**Могут ли увидеть друг друга космонавты, летящие над поверхностью Земли на высоте км, если расстояние между ними по прямой равно км? Радиус Земли равен км (рис. 22).ABOO1O2Рис. 22*Решение:* Чтобы космонавты, находящиеся в точках  и , могли видеть друг друга, надо, чтобы высота  треугольника  была больше радиуса Земли.Треугольник  – равнобедренный,  – высота, тогда, и медиана треугольника,а значит,  Высота больше радиуса Земли, значит, космонавты могут увидеть друг друга.Ответ: Могут.**Задача 2.2**Угол 1,5˚ рассматривают в лупу, увеличивающую в четыре раза. Какой величины покажется угол? **Ответ:** Если вы полагаете, что в лупу угол наш окажется величиной в 1,5˚х4 =6˚, то дали промах. Величина угла нисколько не увеличивается при рассматривании его в лупу. Правда, дуга, измеряющая угол, несомненно увеличивается, но во столько же раз увеличивается и радиус этой дуги, так что величина центрального угла остается без изменения.  | **Задача 3**Телевизионные радио-сигналы распространяются на 15% дальше пределов прямой видимости антенны.Определить, при каком максимальном расстоянии можно принять передачу с помощью антенны высотой 20 м с Останкинской телебашни (ее высота 538м).**Ответ:** На рис. 23 видно, что вершина в принимающей антенны за счет шаровой поверхности Земли будет в крайнем случае еще видна из вершины передающей антенны А тогда, когда точки А и В лежат на касательной к земной поверхности.Рис. 23 В этом случае  где R – радиус Земли. Так как Н очень мало по сравнению с 2R, то , а потому . Полагая в этой формуле  получаем .Определив таким же образом ВС, найдем АВ. Увеличив полученную величину на 15%, получаем искомую формулу для s (в м): s |

**Включение теоремы в систему знаний**

Решение задачи на нахождения радиуса вписанной и описанной окружности равнобедренного треугольника.

**Задача1 .**

Найдите радиус R описанной окружности для равнобедренного треугольника с основанием 10 см и боковой стороной 13 см. (рис. 24).

 Сначала выясним, где находится центр описанной окружности – от этого зависит рисунок к задаче. Здесь 10² меньше 13² + 13², значит, угол при вершине этого равнобедренного треугольника острый. Центр описанной окружности находится во внутренней области равнобедренного треугольника.



Рис. 24

*Первый способ*

Проведя серединный перпендикуляр КО, получим точку О – центр описанной окружности (КО + ВС и ВК = КС = 6,5см). ОВ = ОС = R. OD = BD – OB = 12 – R. Из ODC по теореме Пифагора OD2 = ОС2 – DC2 = R2 – 52. R2 – 52 = (12 – R)2. Решив это уравнение, получим R = 169/24 см.

Ответ: R = 169/24 см.

*Второй способ*

Из подобия треугольников OBK и CBD имеем ОВ/СВ = BK/BD, т.е. R/13 = 6,5/12 и получаем.

 Ответ: R = 169/24 см

*Третий способ*

Продолжив BD до пересечения с описанной окружностью, получим прямоугольный треугольник ВСЕ, откуда ВС² = BD • BE, 132 = 12 • 2R, и

 R = 169/24см.

*Четвёртый способ*

По свойству хорд, пересекающихся внутри круга BD • DE = AD • DC; 12 • (2R –12) = 5 • 5.

Ответ: R = 169/24 см.

*Пятый способ*

По формуле R = abc/(4S ), где a, b, c – стороны треугольника, S – его площадь, которую мы вычислим без труда.

*Шестой способ*

И ещё один метод решения задачи – метод координат, который является универсальным методом геометрии.

Главное при решении задачи этим методом удачный выбор системы координат(основание треугольника лежит на оси абсцисс, а ось ординат проходит через высоту, проведённую к основанию .Вершины треугольника равноудалены от центра окружности).

ОА=ОВ









 Рис. 25

**Задача2.**

 Найдите радиус r вписанной окружности  для равнобедренного треугольника с основанием 10 см и боковой стороной 13 см. (рис. 26)



Рис. 26

*Первый способ*

Из BNO1  следует, что O1N = r = BO1 • sin, т.е. r = (12 – r) · 5/13   и

 r = 10/3см.

Ответ: r = 10/3см

*Второй способ*

О1 – центр вписанной окружности, O1N = r.  DC = CN = 5 см  по свойству касательных, проведённых из одной точки к одной  окружности.

BN =13 – 5 = 8 (см).  ВО1 = 12 – r. Из BNO1 по теореме Пифагора

r2 = (12 – r)2 – 82,  откуда  r = 10/3см.

*Третий способ*

r = 2S/(a + b + c), r = 2 • 60/(13 + 10 + 13), тогда  r = 10/3см.

*Четвёртый способ*

Из подобия   O1NB и  CDB следует, что   ВО1/BC = BN/BD,

(12 – r)/13 = 8/12  и   r = 10/3см.

*Пятый способ*

По свойству  биссектрисы  CBD,  имеем CD/CB = DO1/BO1,

5/13 = r/(12 – r), а тогда из этой пропорции получим r = 10/3см.

*Шестой способ.*

 По свойству  касательной и секущей, проведёнными из одной точки к одной окружности, мы решили эту задачу так:

 BN2 = BD • BM, т.е. 82 = 12 • (12 – 2r), откуда r = 10/3см.

[Скачано с www.znanio.ru](https://znanio.ru)