**численное дифференцирование**

*Производная функции есть предел отношения приращения функции к приращению независимой переменной при стремлении к нулю приращения независимой переменной*

http://www.toehelp.ru/theory/informat/l10image001.png.

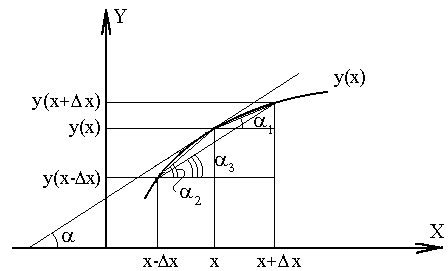
При численном нахождении производной заменим отношение бесконечно малых приращений функций и аргумента http://www.toehelp.ru/theory/informat/l10image002.png отношением конечных разностей. Очевидно, что чем меньше будет приращение аргумента, тем точнее численное значение производной.

**Первая производная. Двухточечные методы.**

Для двухточечных методов при вычислении производных используется значение функции в двух точках. Приращение аргумента задается тремя способами, откладывая Δx = h вправо, влево и в обе стороны от исследуемой точки. Соответственно получается три двухточечных метода численного дифференцирования:

|  |  |
| --- | --- |
| метод 1 | http://www.toehelp.ru/theory/informat/l10image003.png |
| метод 2 | http://www.toehelp.ru/theory/informat/l10image004.png |
| метод 3 | http://www.toehelp.ru/theory/informat/l10image005.png |

Суть указанных методов проиллюстрирована на рисунке. Численное значение тангенса угла α образованного касательной к графику *y(x)* и осью абсцисс, показывает точное значение производной(геометрический смысл производной). Тангенсы углов α1, α2, α3 соответствуют приближенным значениям производных, определенных методами 1,2,3 соответственно (подумайте почему?).



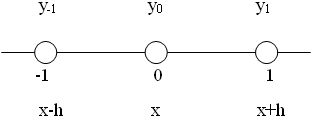
**Пример.** Вычислить точное и приближенное (тремя методами) значения производной функции y=x\*x в точке x=1 с шагом h=1 и h=0.001.

Этапы решения задачи приведены в таблице.

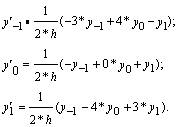
Таблица

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| N | *Этап программирования* | *Выполнение* |
| 1. | *Постановка задачи* | Вычислить точное и приближенное (тремя методами) значения производной функции y=x\*x в точке x=1 с шагом h=1 и h=0.001. |
| 2. | *Математическое описание* | Аналитическое решение: y'=2x , y'(1)=2,  Численное решение для шага: h=1  http://www.toehelp.ru/theory/informat/l10image007.png,  для шага h=0.001  http://www.toehelp.ru/theory/informat/l10image008.png |
| 3. | *Разработка структограммы* | *Выполнить самостоятельно* |
| 4. | *Написание программы* | *Выполнить самостоятельно* |
| 5. | *Отладка и получени результатов* | *Выполнить самостоятельно* |

**Вычисление первых производных по трёхточечным схемам.**

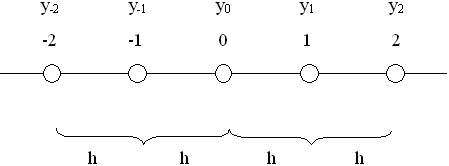


Расчетные формулы для указанной трехточечной схемы имеют вид:



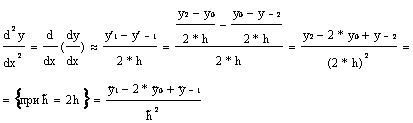
**Вычисление производных второго порядка.**

Вторая производная вычисляется как первая производная от первой производной. Для следующей пятиточечной схемы



расчетная формула имеет вид:

http://www.toehelp.ru/theory/informat/l10image012.png



**Пример.** Написать программу для нахождения второй производной функции y = 2 \* x4

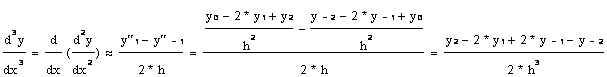
в точке x=1 с шагом h=0.01, сравнить с точным значением.

Таблица

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| N | *Технологическая операция* | *Выполнение* |
| 1. | *Постановка задачи* | Написать программу для нахождения второй производной функции y = 2 \* x4 в точке x=1 с шагом h=0.01, сравнить с точным значением. |
| 2. | *Математическое описание* | Аналитическое значение  http://www.toehelp.ru/theory/informat/l10image014.png.  Приближенное значение  http://www.toehelp.ru/theory/informat/l10image015.png |
| 3. | *Разработка структограммы* | |  | | --- | | Описание x,y,h | | x=1; h=0.01 | | http://www.toehelp.ru/theory/informat/l10image016.png | | Вывод http://www.toehelp.ru/theory/informat/l10image017.png | |
| 4. | *Написание программы* | **Program P7;**  **Var x,ddy,h:real;**  **Function y(x:real):real;**  **begin**  **y:=2\*sqr(sqr(x));**  **end;**  **begin**  **x:=1;h:=0.01;**  **ddy:=(y(x+h)-2\*y(x)+y(x-h))/h/h;**  **writeln(ddy);**  **end.** |
| 5. | *Отладка и получение результатов* | *Выполнить сомостоятельно.* |

**Вычисление производных третьего порядка.**

Производные третьего порядка вычисляются как первая производная от производной второго порядка. Для рассмотренной пятиточечной схемы расчетная формула имеет вид



**Контрольное задание. Лабораторная работа 2.**

**Численное дифференцирование**

1. Вычислить значение производной в произвольной точке x=x0 аналитически и численно тремя методами для пяти значений приращения аргумента Δ*x*=1; 0.2; 0.1; 0.01; 0.001. Результаты расчета вывести на экран и распечатать в виде таблицы

Таблица вывода результатов расчета

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Δx | y(x) | y'(x) | http://www.toehelp.ru/theory/informat/l10image019.png | http://www.toehelp.ru/theory/informat/l10image020.png | http://www.toehelp.ru/theory/informat/l10image021.png |
| 1 |  |  |  |  |  |
| 0.2 |  |  |  |  |  |
| 0.1 |  |  |  |  |  |
| 0.01 |  |  |  |  |  |
| 0.001 |  |  |  |  |  |

1. Построить графики функций y'(x0) = F(Δx). Варианты функций приведены в таблице.

Таблица

Варианты функций

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Вар. | Вид функции | Вар. | Вид функции |
| 1 | x(t)=Ae-at sin(ωt+b) | 14 | y=ctgm (ax) |
| 2 | x(t)=Aeat cos(ωt+b) | 15 | y(x)=(eax-e-ax)n |
| 3 | http://www.toehelp.ru/theory/informat/l10image022.png | 16 | x(t)=tat |
| 4 | уυ(t)=cos2(at+b) | 17 | y(x)=(ax)sin(bx) |
| 5 | yυ(t)=sin2(at+b) | 18 | http://www.toehelp.ru/theory/informat/l10image023.png |
| 6 | http://www.toehelp.ru/theory/informat/l10image024.png | 19 | http://www.toehelp.ru/theory/informat/l10image025.png |
| 7 | q(t)=(a-btn)n | 20 | http://www.toehelp.ru/theory/informat/l10image026.png |
| 8 | y(x)=xncos(ax) | 21 | R(φ)=arccosm(a+bφn) |
| 9 | http://www.toehelp.ru/theory/informat/l10image027.png | 22 | r(φ)=csin(aφ+b) |
| 10 | http://www.toehelp.ru/theory/informat/l10image028.png | 23 | y(x)=ln(tgn(ax+b)) |
| 11 | http://www.toehelp.ru/theory/informat/l10image029.png | 24 | vυ(t)=loga(tn+bm)k |
| 12 | S(φ)=Вcоsn(aφ+b) | 25 | S(φ)=Asinn(aφ+b) |
| 13 | y=tgax( x/a ) | 26 | X(t)=lg(atn+b) |

*Примечание.* Значение параметров a, b, c, d, m, n, A, B выбрать самостоятельно.

**Содержание отчета:**

1. Название, цель работы и задание.
2. Математическое описание, алгоритм (структограмма) и текст программы.
3. Таблица результатов расчета, четыре графика зависимости y'(x0) = F(Δx) для трехчисленных методов и точного значения интеграла, выводы по работе.

исленное дифференцирование.

Допустим, что в некоторой точке x у функции f(x) существует производная r-того порядка f(r)(x) которую точно вычислить либо не удается, либо слишком сложно. В этом случае для приближенного нахождения производных функции используются формулы численного дифференцирования.

Задача численного дифференцирования состоит в приближенном вычислении производных функции f(x) по заданным в конечном числе точек значениям этой функции.

Один из универсальных способов построения формул численного дифференцирования состоит в том, что по значениям функции f(x) в некоторых узлах x0 , x1 , ... , xN строят интерполяционный полином PN(x) (обычно в форме Лагранжа) и приближенно полагают

f (r)(x) ≈P(r)N(x), 0 ≤ r ≤ N (4.1)

В ряде случаев наряду с приближенным равенством удается (например, используя формулу Тейлора) получить точное равенство, содержащее остаточный член R (погрешность численного дифференцирования):

f (r)(x) = P(r)N(x) + R, 0 ≤ r ≤ N

Такие формулы называются формулами численного дифференцирования с остаточными членами. Степень, с которой входит величина (hi=xi - xi-1) в остаточный член, называется порядком погрешности формулы численного дифференцирования. Формулы с отброшенными остаточными членами называются просто формулами численного дифференцирования.

Ниже приводятся несколько распространенных формул численного дифференцирования с остаточными членами для первой (r=1) и второй (r=2) производных в узлах, расположенных с постоянным шагом hi≡h > 0 [6, стр.58]:

r=1, N=1 (два узла):

f '(x0 ) = (f1 - f0 )/h - hf ''(ξ)/2 (4.2)

f '(x1 ) = (f1 - f0 )/h + hf ''(ξ)/2 (4.3)

r=1, N=2 (три узла):

f '(x0 ) = (-3f0 + 4f1 - f2)/2h + h2f '''(ξ)/3 (4.4)

f '(x1 ) = (f2 - f0)/2h - h2f '''(ξ)/6 (4.5)

f '(x2 ) = (f0 - 4f1 + 3f2)/2h + h2f '''(ξ)/3 (4.6)

r=2, N=2 (три узла):

f ''(x0 ) = (f0 - 2f1 + f2 )/h2 - hf '''(ξ) (4.7)

f ''(x1 ) = (f0 - 2f1 + f2 )/h2 - h2f (4)(ξ)/12 (4.8)

f ''(x2 ) = (f0 - 2f1 + f2 )/h2 + hf '''(ξ) (4.9)

r=2, N=3 (четыре узла):

f ''(x0 ) = (2f0 - 5f1 + 4f2 - f3 )/h2 + 11h2f (4)(ξ)/12 (4.10)

f ''(x1 ) = (f0 - 2f1 + f2 )/h2 - h2f (4)(ξ)/12 (4.11)

f ''(x2 ) = (f0 - 2f1 + f3 )/h2 - h2f (4)(ξ)/12 (4.12)

f ''(x3 ) = (-f0 + 4f1 - 5f2 + 2f3 )/h2 + 11h2f (4)(ξ)/12 (4.13)

В приведенных формулах ξ есть некоторая точка (своя для каждой из формул) из интервала (x0 , xN). Остаточные члены этих формул находятся с помощью формулы Тейлора. При этом предполагается, что на отрезке [x0 , xN] у функции f(x) непрерывна производная, через которую выражается остаточный член. При четном N в среднем узле для четной производной порядок точности формулы на единицу больше, чем в остальных узлах. Поэтому рекомендуется по возможности использовать формулы численного дифференцирования с узлами, расположенными симметрично относительно той точки, в которой ищется производная.

ЗАДАЧА 4.1 Вывести формулы (4.2)-(4.13).

Оценка погрешности общей формулы численного дифференцирования (4.1) выражается в виде неравенства через максимум модуля производной f(k+1)(x) при любых r, k, N, таких, что 0 ≤ r ≤ k ≤ N. Ограничиваясь рассмотрением случая расположения узлов с постоянным шагом h, сформулируем результат в виде теоремы (без доказательства).

ТЕОРЕМА 4.1 [6, стр.61] Пусть xi=x0 + ih, h>0, i=0, ..., N и функция f(x) Ck+1[x0,xN]. Тогда существуют такие константы crkN, зависящие только от r, k, N и не зависящие от шага h и функции f(x), что

(4.14)

где PN(x) - интерполяционный полином Лагранжа для функции f(x), 0 ≤ r ≤ k ≤ N.

Оценка (4.14) полезна тем, что она устанавливает скорость убывания погрешности относительно h на всем отрезке [x0 , xN] при фиксированных параметрах r, k, N.

В формулах численного дифференцирования с постоянным шагом h значения функции f(x) делятся на hr, где r-порядок вычисляемой производной. Поэтому при малом h неустранимые погрешности в значениях функции f(x) оказывают сильное влияние на результат численного дифференцирования. Таким образом, возникает задача выбора оптимального шага h, так как погрешность собственно метода стремится к нулю при h → 0, а неустранимая погрешность растет. В результате общая погрешность, возникающая при численном дифферецировании, может неограниченно возрастать при h → 0. Поэтому операцию численного дифференцирования называют некорректной.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1 Другим способом нахождения производной табличной функции является использование формулы производной интерполяционного кубического сплайна, построенного по этой таблице. В этом случае производная вычисляется на каждом отрезке [xi-1 , xi], i=1, ..., N, по формуле (3.10), с использованием вектора (m0 ,..., mN )T, найденного методом прогонки как решение системы уравнений (3.13).

|  |
| --- |
| **Формулы численного дифференцирования**    ***1. На основе первой инерполяционной формулы Ньютона***  Для нахождения первой и второй производных функции http://www.simumath.net/library/materials/Num_Dif_formulas/images/Eqn001.png функцию *у*, заданную в равноотстоящих точках http://www.simumath.net/library/materials/Num_Dif_formulas/images/Eqn002.png (*i* = 0, 1, 2, …,*n*) отрезка [*a*, *b*] значениями http://www.simumath.net/library/materials/Num_Dif_formulas/images/Eqn003.png, приближенно заменяют интерполяционным многочленом Ньютона, построенным для системы узлов http://www.simumath.net/library/materials/Num_Dif_formulas/images/Eqn004.png [1]:  http://www.simumath.net/library/materials/Num_Dif_formulas/images/Eqn005.png       (5)  Раскрывая скобки и учитывая, что  http://www.simumath.net/library/materials/Num_Dif_formulas/images/Eqn006.png  получим:  http://www.simumath.net/library/materials/Num_Dif_formulas/images/Eqn007.png.        (6)  Аналогично, учитывая  http://www.simumath.net/library/materials/Num_Dif_formulas/images/Eqn008.png  получим:  http://www.simumath.net/library/materials/Num_Dif_formulas/images/Eqn009.png .              (7)  Таким же образом можно при необходимости вычислить производную функции http://www.simumath.net/library/materials/Num_Dif_formulas/images/Eqn010.png любого порядка. Заметим, что при вычислении производных в фиксированной точке *х* в качестве http://www.simumath.net/library/materials/Num_Dif_formulas/images/Eqn011.png следует брать ближайшее табличное значение аргумента. Можно также вывести формулы численного дифференцирования, основанные на второй интерполяционной формуле Ньютона [1].    ***2. На основе инерполяционной формулы Стирлинга***  Пусть http://www.simumath.net/library/materials/Num_Dif_formulas/images/Eqn012.png– система равноотстоящих точек с шагом http://www.simumath.net/library/materials/Num_Dif_formulas/images/Eqn013.png и http://www.simumath.net/library/materials/Num_Dif_formulas/images/Eqn014.pngсоответствующие значения данной функции http://www.simumath.net/library/materials/Num_Dif_formulas/images/Eqn015.png. Полагая  http://www.simumath.net/library/materials/Num_Dif_formulas/images/Eqn016.png и заменяя функциюhttp://www.simumath.net/library/materials/Num_Dif_formulas/images/Eqn017.png интерполяционным полиномом Стирлинга, получим:  http://www.simumath.net/library/materials/Num_Dif_formulas/images/Eqn018.png              (8)  где для краткости записи введены следующие обозначения:  http://www.simumath.net/library/materials/Num_Dif_formulas/images/Eqn019.png  и т.д.  Из (8) с учетом того, что http://www.simumath.net/library/materials/Num_Dif_formulas/images/Eqn020.png , следует:  http://www.simumath.net/library/materials/Num_Dif_formulas/images/Eqn021.png             (9)  http://www.simumath.net/library/materials/Num_Dif_formulas/images/Eqn022.png  ( |

10)

**Численное дифференцирование** — совокупность методов вычисления значения [производной](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B8) дискретно заданной функции.

В основе численного дифференцирования лежит [аппроксимация](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%BF%D0%BF%D1%80%D0%BE%D0%BA%D1%81%D0%B8%D0%BC%D0%B0%D1%86%D0%B8%D1%8F) функции, от которой берется производная, [интерполяционным многочленом](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%98%D0%BD%D1%82%D0%B5%D1%80%D0%BF%D0%BE%D0%BB%D1%8F%D1%86%D0%B8%D0%BE%D0%BD%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%84%D0%BE%D1%80%D0%BC%D1%83%D0%BB%D0%B0). Все основные формулы численного дифференцирования могут быть получены при помощи первого [интерполяционного многочлена Ньютона](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%98%D0%BD%D1%82%D0%B5%D1%80%D0%BF%D0%BE%D0%BB%D1%8F%D1%86%D0%B8%D0%BE%D0%BD%D0%BD%D1%8B%D0%B5_%D1%84%D0%BE%D1%80%D0%BC%D1%83%D0%BB%D1%8B_%D0%9D%D1%8C%D1%8E%D1%82%D0%BE%D0%BD%D0%B0) (формулы Ньютона для начала таблицы).

Основными задачами являются вычисление производной на краях таблицы и в ее середине. Для равномерной сетки формулы численного дифференцирования «в начале таблицы» можно представить в общем виде следующим образом:

f'_i = \frac{1}{b h} \sum_j a_j f_{i+j} + \Delta(f),

где ~\Delta(f) — погрешность формулы. Здесь коэффициенты ~a_j и ~b зависят от степени n использовавшегося интерполяционного многочлена, то есть от необходимой точности (скорости сходимости к точному значению при уменьшении шага сетки) формулы. Коэффициенты представлены в таблице

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| n | a_0 | a_1 | a_2 | a_3 | a_4 | a_5 | b |
| 1 | -1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 2 | -3 | 4 | -1 | 0 | 0 | 0 | 2 |
| 3 | -11 | 18 | -9 | 2 | 0 | 0 | 6 |
| 4 | -25 | 48 | -36 | 16 | -3 | 0 | 12 |
| 5 | -137 | 300 | -300 | 200 | -75 | 12 | 60 |

Формулы численного дифференцирования[[править](https://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%A7%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D0%B4%D0%B8%D1%84%D1%84%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%BD%D1%86%D0%B8%D1%80%D0%BE%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D0%B5&veaction=edit&vesection=2) | [править вики-текст](https://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%A7%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D0%B4%D0%B8%D1%84%D1%84%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%BD%D1%86%D0%B8%D1%80%D0%BE%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D0%B5&action=edit&section=2)]

Один из универсальных способов построения формул численного дифференцирования состоит в том, что по значениям функции f(x) в некоторых узлах x_0, x_1, \ldots , x_N \; строят интерполяционный полином P_N(x)(в форме Лагранжа или в форме Ньютона) и приближенно полагают

f^{(r)}(x)\approx P^{(r)}_N(x),0 \leq r \leq N

В ряде случаев, наряду у с приближенным равенством удается (например, используя формулу Тейлора) получить точное равенство, содержащее остаточный член R(погрешность численного дифференцирования)

f^{(r)}(x)=P^{(r)}_N(x)+R,0 \leq r \leq N

Такие формулы называются формулами численного дифференцирования с остаточными членами.

Степень, с которой входит величина h = \max h_i\,(h_i=x_i-x_{i-1}) в остаточный член, называется порядком погрешности формулы численного дифференцирования. Формулы с отброшенными остаточными членами называются просто формулами численного дифференцирования.

Ниже приводятся несколько распространенных формул численного дифференцирования с остаточными членами для первой ({r=1}) и второй ({r=2}) производных в узлах, расположенных с постоянным шагом {h>0}:

{r=1,N=1} (два узла):

f^'({x_o})=({f_1-f_0})/h-h{f^{' '}(\xi)}/2

f^'({x_1})=({f_1-f_0})/h+h{f^{' '}(\xi)}/2

{r=1,N=2} (три узла):

f^'({x_o})=(-3{f_0}+4{f_1}-{f_2})/2{h}+h^2{f^{'''}(\xi)}/3

f^'({x_1})=({f_2}-{f_0})/2{h}+h^2{f^{'''}(\xi)}/6

f^'({x_2})=({f_0}-4{f_1}+3{f_2})/2{h}+h^2{f^{'''}(\xi)}/3

{r=2,N=2} (три узла):

f^{''}({x_0})=({f_0}-2{f_1}+{f_2})/{h^2}+h{f^{'''}(\xi)}

f^{''}({x_1})=({f_0}-2{f_1}+{f_2})/{h^2}+h^2{f^{(4)}(\xi)}/12

f^{''}({x_2})=({f_0}-2{f_1}+{f_2})/{h^2}+h{f^{'''}(\xi)}

{r=2,N=3} (четыре узла):

f^{''}({x_0})=(2{f_0}-5{f_1}+4{f_2}-{f_3})/{h^2}+11{h^2}{f^{(4)}(\xi)}/12

f^{''}({x_1})=({f_0}-2{f_1}+{f_2})/{h^2}-h^2{f^{(4)}(\xi)}/12

f^{''}({x_2})=({f_0}-2{f_1}+{f_2})/{h^2}-h^2{f^{(4)}(\xi)}/12

f^{''}({x_3})=(-{f_0}+4{f_1}-5{f_2}+2{f_3})/{h^2}+11{h^2}{f^{(4)}(\xi)}/12

где h — шаг сетки, а точка \xi - некоторая промежуточная точка.

В формулах численного дифференцирования с постоянным шагом h значения функции f({x}) делятся на h^{r}, где r-порядок вычисляемой производной. Поэтому при малом h неустранимые погрешности в значениях функции f({x}) оказывают сильное влияние на результат численного дифференцирования. Таким образом, возникает задача выбора оптимального шага h, так как погрешность собственно метода стремится к нулю при h\to{0}, а неустранимая погрешность растет. В результате общая погрешность, которая возникает при численном дифферецировании, может неограниченно возрастать при h\to{0}. Поэтому операцию численного дифференцирования считают некорректной.

- See more at: http://www.toehelp.ru/theory/informat/lecture10.html#sthash.WGaWZaMG.dpuf